ΛΥΣΕΙΣ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2006

ΘΕΜΑ 1ο

α) Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 224

β) Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 188

γ) 1. Σ , 2. Λ , 3. Σ , 4. Σ , 5. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α)

$$(5z-1)^5 = (z-5)^5 \Rightarrow |(5z-1)^5| = |(z-5)^5|$$

$$|5z-1|^5 = |z-5|^5$$

$$|5z-1| = |z-5|$$

β)

$$|5z-1| = |z-5| \Leftrightarrow |5z-1|^2 = |z-5|^2$$

$$(5z-1)(5\bar{z}-1) = (z-5)(\bar{z}-5)$$

$$25z\bar{z} - 5z - 5\bar{z} + 1 = z\bar{z} - 5z - 5\bar{z} + 25$$

$$24z\bar{z} = 24$$

$$z\bar{z} = 1$$

$$|z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$$

γ)

$$w = 5z + 1 \Leftrightarrow w - 1 = 5z \Rightarrow |w-1| = |5z|$$

$$|w-1| = 5|z|$$

$$|w-1| = 5$$

$$|w-(1+0i)| = 5$$

Επομένως οι εικόνες M(w) ανήκουν στον κύκλο που έχει κέντρο K(1, 0) και ακτίνα $\rho = 5$

ΘΕΜΑ 3ο

α)

Πρέπει $x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$

Άρα $A_f = (5, +\infty)$

β)

$$f'(x) = \frac{1}{x-5} + 2 > 0 \quad \text{για κάθε} \quad x > 5$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

γ)

- $\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+}[\ln(x-5)+2x-12]$

  Για το όριο $\lim_{x\to 5^+}\ln(x-5)$ θέτω $x-5=u$ οπότε $u\to 0^+$

  Άρα $\lim_{x\to 5^+}\ln(x-5) = \lim_{u\to 0^+}\ln u = -\infty$

  Ακόμα είναι $\lim_{x\to 5^+} 2x = 10$ και $\lim_{x\to 5^+} 12 = 12$

  Οπότε $\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+}[\ln(x-5)+2x-12] =$

  $= \lim_{x\to 5^+}\ln(x-5) + \lim_{x\to 5^+} 2x - \lim_{x\to 5^+} 12 =$

  $= -\infty + 10 - 12 = -\infty$

- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}[\ln(x-5)+2x-12]$

  Για το όριο $\lim_{x\to +\infty}\ln(x-5)$ θέτω $x-5=u$ οπότε $u\to +\infty$

  Άρα $\lim_{x\to +\infty}\ln(x-5) = \lim_{u\to +\infty}\ln u = +\infty$

  Ακόμα είναι $\lim_{x\to +\infty} 2x = +\infty$ και $\lim_{x\to +\infty} 12 = 12$

  Οπότε $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}[\ln(x-5)+2x-12] =$

  $= \lim_{x\to +\infty}\ln(x-5) + \lim_{x\to +\infty} 2x - \lim_{x\to +\infty} 12 =$

  $= (+\infty) + (+\infty) - 12 = +\infty$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = (-\infty, +\infty)$

δ)

Επειδή το 2006 βρίσκεται στο σύνολο τιμών της f , η εξίσωση f(x) = 2006 έχει μία τουλάχιστον λύση. Και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα η λύση είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ 4ο

α)

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $\Phi'(x) = \dfrac{f'(x)e^{2x} - 2e^{2x}f(x)}{(e^{2x})^2} = \dfrac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}$ **(1)**

Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η $f(x) = 3 + 2\int_0^x f(t)dt$ θα είναι παραγωίσιμη.

Η υπόθεση $f(x) = 3 + 2\int_0^x f(t)dt \Rightarrow f'(x) = 2f(x)$

Η (1) γίνεται $\Phi'(x) = 0$, άρα η Φ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$

β)

Από το (α) έχουμε ότι $\Phi(x) = c \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{e^{2x}} = c$ **(2)**

Η υπόθεση για $x = 0$ δίνει $f(0) = 3 + 2\int_0^0 f(t)dt = 3$

Η (2) για $x = 0$ δίνει $\dfrac{f(0)}{e^0} = c \Leftrightarrow 3 = c$

Η (2) γίνεται $\dfrac{f(x)}{e^{2x}} = 3 \Leftrightarrow f(x) = 3e^{2x}$

γ)

Για κάθε $x \in [0, \lambda]$ είναι $f(x) > 0$ οπότε το ζητούμενο εμβαδόν $E(\lambda)$ είναι

$$E(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(x)dx = \int_0^{\lambda} 3e^{2x}dx = \left[\frac{3}{2}e^{2x}\right]_0^{\lambda} = \frac{3}{2}e^{2\lambda} - \frac{3}{2}$$

δ)

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{E(\lambda)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{e^{2\lambda}}{\lambda} - \frac{3}{2\lambda}\right)$$

Όμως $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{e^{2\lambda}}{\lambda} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{(e^{2\lambda})'}{\lambda'} = \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{2e^{2\lambda}}{1} = +\infty$

και $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{3}{2\lambda} = 0$

Άρα
$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{E(\lambda)}{\lambda} &= \lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{e^{2\lambda}}{\lambda} - \frac{3}{2\lambda}\right) = \\ &= \lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{e^{2\lambda}}{\lambda}\right) - \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{3}{2\lambda} = \\ &= \frac{3}{2}\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{e^{2\lambda}}{\lambda}\right) - 0 = \frac{3}{2}\cdot(+\infty) = +\infty\end{aligned}$$